Санкт-Петербургский государственный университет

ТОКМАЧЕВ Александр Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Дискретный телесный угол

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2017 «Математика»*

Научный руководитель:
Зав. лабораторией
ПОМИ РАН
Профессор РАН
доктор ф.-м. наук
Запорожец Д. Н.

Рецензент:
Научный сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
кандидат физ.-мат. наук
Коледа Д. В.

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Введениие

Рассмотрим последовательность Фарея порядка Q, определенную как

$$\mathcal{F}_Q := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq b \leq Q, \gcd(a,b) = 1 \right\},$$

где $\gcd(\cdot,\cdot)$ обозначает наибольший целый делитель. Хорошо известно (см., например, [2], [6] или [7]), что асимптотически с ростом Q последовательность Фарея равномерно распределена на $[0,1]$: для любого интервала $I \subset [0,1]$,

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\#(\mathcal{F}_Q) \cap I}{\#\mathcal{F}_Q} = |I|,$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега на прямой, а $\#$ — число элементов в множестве. Этот факт позволяет определить последовательность вероятностных мер на $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, которая слабо сходится к равномерной мере на $[0,1]$ (см. [8]).

Возникает естественный вопрос: а что, если мы захотим выбрать случайное рациональное число не из отрезка $[a,b]$, а из всей прямой $\mathbb{R}$?

В то время как на конечном интервале наиболее естественным распределением является нормированная мера Лебега, на вещественной прямой эту роль играет нормальное распределение. Используя приведенное выше асимптотически равномерное распределении на множестве $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, можно построить распределения на $\mathbb{Q}$, слабо сходящиеся к нормальному. Однако это конструкция довольно сложна и громоздка. На наш взгляд, гораздо лучшим выбором является распределение Коши. Приведем для этого две причины.

Первая: существует естественная биекция между рациональными точками прямой и точками единичной окружности, имеющими рациональные координаты (см., например [10, стр. 3]). Данная биекция реализуется при помощи стереографической проекции. В свою очередь, если таким образом спроецировать равномерное распределение на окружности на прямую, то получится распределение Коши.

Вторая причина тесно связана с нашей главной целью. Формально рациональные числа являются алгебраическими числами степени 2. Мы хотим обобщить описанную выше задачу на алгебраические числа любой степени. А именно, обозначим через $\overline{\mathbb{Q}}_n$ множество вещественных алгебраических чисел степени n. Наша цель — для каждого $n \in \mathbb{N}$ построить последовательность мер на $\overline{\mathbb{Q}}_n$, слабо сходящуюся к некоторой мере μ_n. Более того, для каждого n мы представим целое семейство предельных мер μ_n с соответствующими последовательностями. Как правило, меры μ_n довольно сложно устроены, однако, для каждого n среди всего семейства предельных мер можно найти одну, имеющую очень простой вид, и при этом одинаковую для всех n. Это стандартное распределение Коши.

2. Основной результат

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция, такая что

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty. \tag{1}$$

Обозначим через $\mu_{f,n}$ вероятностную меру на $\overline{\mathbb{Q}}_n$, определенную по f следующим образом. Возьмем точку $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, такую что $u_n \neq 0$, и рассмотрим многочлен степени n, соответствующий $\mathbf{u}$:

$$p_{\mathbf{u}}(t) := u_0 + u_1 t + \cdots + u_n t^n.$$

Пусть $t_{\mathbf{u}}^1, \ldots, t_{\mathbf{u}}^{N_{\mathbf{u}}}$ — вещественные корни $p_{\mathbf{u}}$. В силу (1) имеем

$$S_f := \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) N_{\mathbf{u}} < \infty.$$

Далее, для $a \in \overline{\mathbb{Q}}_n$ положим

$$\mu_{f,n}(a) := S_f^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) \mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a) = 0].$$

Ясно, что $\mu_{f,n}$ — вероятностная мера на $\overline{\mathbb{Q}}_n$: по теореме Фубини,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_f} \sum_{a \in \overline{\mathbb{Q}}_n} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) \mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a) = 0] &= \frac{1}{S_f} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) \sum_{a \in \overline{\mathbb{Q}}_n} \mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a) = 0] \\ &= \frac{1}{S_f} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) N_{\mathbf{u}} = 1. \end{aligned}$$

Мы здесь неявно предположили, что $S_f > 0$. Все рассматриваемые далее функции будут удовлетворять данному условию.

Все готово для формулировки основного результата.

Теорема 1. *Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть*

$$f_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \exp\left(-\frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^2}{\binom{n}{k}} \right).$$

Тогда семейство вероятностных мер на $\overline{\mathbb{Q}}_n$, определенных по $\{f_\sigma\}$, слабо сходится к стандартному распределению Коши при $\sigma \to \infty$:

$$\mu_{f_\sigma, n} \xrightarrow[\sigma \to \infty]{w} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}.$$

Эта теорема будет выведена в разделе 4 из более общего результата, который использует теорию случайных многочленов и обсуждается в следующем разделе.

3. Связь со случайными многочленами

Как и ранее, начнем с определений. Снова зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция, такая что

$$0 < \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty. \tag{2}$$

Обозначим через G_f случайный многочлен

$$G_f(t) := \xi_0 + \xi_1 t + \cdots + \xi_n t^n,$$

где $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины с плотностью совместного распределения

$$\frac{f(\mathbf{u})}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{v}}.$$

Как известно, (см. [9]) существует неотрицательная измеримая функция $h_f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1_+$, такая что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}^1$,

$$\int_I h_f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}\,[\text{количество вещественных корней } G_f \text{ на интервале } I].$$

Функция h_f закономерно называется плотностью корней многочлена G_f.

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, убывает, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ и любого α, такого что $sgn(\alpha_i) = sgn(x_i)$ (или одно из α_i и x_i равно нулю) выполнено

$$f(x + \alpha) \leqslant f(x).$$

Будем говорить, что конус $A \subset \mathbb{R}^d$ с вершиной в нуле измерим, если его проекция на единичную сферу является измеримым множеством.

Все готово для формулировки общего результата, который лежит в основе Теоремы 1 и некоторых других следствий.

Теорема 2. *Пусть $f_1, f_2, f_3 \ldots$ — последовательность неотрицательных измеримых функций из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющих* (2) *и таких что*

i) *f_k убывают,*

ii) *существует неотрицательная интегрируемая функция f, такая что для любого измеримого конуса A с вершиной в нуле выполнено*

$$\int_A f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

iii) *для всех достаточно больших R выполнено*

$$\int_{B_R(0)} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

iv)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^{n+1}\setminus\{0\} \\ \exists m\colon u_m=0}} f_k(\mathbf{u}) = 0.$$

Тогда последовательность мер, определенных на $\overline{\mathbb{Q}}_n$ при помощи $\{f_k\}$, слабо сходится к нормированной плотности корней многочлена G_f при $k \to \infty$:

$$\mu_{f_k,n} \xrightarrow[k\to\infty]{w} \frac{h_f}{\int h_f}.$$

Доказательство будет представлено в разделе 5.

Сформулируем два частных случая Теоремы 2, связанных с известными ранее результатами.

Следствие 1. *Пусть $f_1, f_2, f_3 \dots$ —последовательность неотрицательных измеримых функций из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющих (2), таких что*

i) f_k радиально симметричны,

ii) f_k убывают на бесконечности

iii) для некоторого r выполнено

$$\frac{\int_{B_r(0)} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Тогда множество мер на $\overline{\mathbb{Q}}_n$, определенных по $\{f_k\}$, слабо сходится к нормированной плотности корней случайного многочлена с независимыми коэффициентами, имеющими стандартное Гауссовское распределение (многочлены Каца):

$$\mu_{f_k,n} \xrightarrow[\sigma\to\infty]{w} \frac{h(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,\mathrm{d}s},$$

где

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \left[\frac{(n+1)t^n(1-t^2)}{1-t^{2n+2}}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-1}.$$

В частном случае для $f_k = \mathbb{1}[B_k(0)]$ это было доказано ранее в [3]. Явное выражение для $h(t)$ было получено Кацем в [4].

Следствие 2. *Пусть $f_1, f_2, f_3 \dots$ — последовательность неотрицательных измеримых функций из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющих (2) и таких что*

i) f_k представляются в виде произведения одномерных неотрицательных измеримых функций

$$f_k(x) = f_k^{(0)}(x_0) \cdot f_k^{(1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_k^{(n)}(x_n),$$

ii) каждая $f_k^{(l)}$ *убывает (в описанном ранее смысле), и*

$$\int_{\mathbb{R}} f_k^{(l)}(x)dx = 1,$$

iii)

$$f_k^{(l)}(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

iv) существует функция f*, такая что для любого измеримого конуса* A *с вершиной в нуле выполнено*

$$\int_A f_k(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_A f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Тогда последовательность мер, определенных на $\overline{\mathbb{Q}}_n$ *при помощи* $\{f_k\}$*, слабо сходится к нормированной плотности корней многочлена* G_f *при* $k \to \infty$*:*

$$\mu_{f_k,n} \xrightarrow[k\to\infty]{w} \frac{h_f}{\int h_f}.$$

Для случая $f_k = \left(\frac{1}{2k}\right)^{n+1} \mathbb{1}[-k,k]^{n+1}$ это было доказано в [5]. Доказательства следствий будут приведены в разделе 6. В следующем разделе мы выведем теорему 1 из следствия 2.

4. Вывод теоремы 1 из следствия 2

Начнем с простого замечания: если функции f и g таковы, что $g = \alpha f$, то $\mu_{g,n} = \mu_{f,n}$. Действительно,

$$\mu_{g,n}(a) = S_g^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ u_n\neq 0}} g(\mathbf{u})\mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a)=0] = \alpha^{-1} S_f^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ u_n\neq 0}} \alpha f(\mathbf{u})\mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a)=0] =$$
$$= S_f^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ u_n\neq 0}} f(\mathbf{u})\mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a)=0] = \mu_{f,n}.$$

Рассмотрим новые функции

$$g_\sigma(\mathbf{x}) = \left((\pi\sigma)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{-1/2} \times\ \exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^2}{\binom{n}{k}}\right).$$

Поскольку g_σ и f_σ отличаются лишь постоянным множителем, то достаточно доказать, что

$$\mu_{g_\sigma,n} \xrightarrow[\sigma\to\infty]{w} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}.$$

Проверим, что функции g_σ удовлетворяют условию следствия 2.

Заметим, что

$$g_\sigma(\mathbf{x}) = \prod_{l=0}^{n} g_\sigma^{(l)}(x_l),$$

где

$$g_\sigma^{(l)}(x_l) = \left(\pi\sigma\binom{n}{l}\right)^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{x_l^2}{\sigma\binom{n}{l}}\right).$$

Ясно, что $g_\sigma^{(l)}$ убывает с ростом модуля x_l,

$$\int_{\mathbb{R}} g_\sigma^{(l)}(x)dx = 1$$

и

$$\lim_{\sigma\to\infty} g_\sigma^{(l)}(0) = 0.$$

Значит первые три условия следствия выполнены. Осталось проверить последнее условие. Для этого выберем в качестве f функцию g_1. Пусть A — измеримый конус с вершиной в нуле. Тогда

$$\int_A g_\sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \left(\pi^{n+1}\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{-1/2}\int_A \sigma^{-(n+1)/2}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^2}{\binom{n}{k}}\right)d\mathbf{x} = /\mathbf{x} = \sqrt{\sigma}\mathbf{u}/ =$$

$$= \left(\pi^{n+1}\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{-1/2}\int_A \exp\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k^2}{\binom{n}{k}}\right)d\mathbf{u} = \int_A g_1(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

Во втором равенстве мы воспользовались тем, что A — это конус с вершиной в нуле, а значит при замене переменных область интегрирования не меняется. Таким образом, имеем тривиальный предел

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_A g_\sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A g_1(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

и четвертое условие следствия выполнено.

Итого, по следствию 2

$$\mu_{f_\sigma,n} = \mu_{g_\sigma,n} \xrightarrow[\sigma\to\infty]{w} \frac{h_{g_1}}{\int h_{g_1}}.$$

В свою очередь, для функции g_1 плотность корней h_{g_1} была вычислена в [1]:

$$h_{g_1}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi(1+x^2)},$$

а значит

$$\frac{h_{g_1}}{\int h_{g_1}} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

и теорема доказана.

Замечание. Строго говоря, мы доказали теорему не для $\sigma\to\infty$, а для любой последовательности $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sigma_k\to\infty$. Ясно, что если сходимость имеет место для любой такой последовательности, то она есть и для $\sigma\to\infty$.

5. Доказательство теоремы 2

Начнем с описания обозначений, которые будем использовать.

Рассмотрим конус $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с вершиной в нуле. Обозначим через $\overline{A}$ проекцию A на сферу:

$$\overline{A} = \left\{ \frac{x}{|x|} \colon x \in A,\ x \neq 0 \right\}.$$

Пусть λ — мера Лебега на сфере. Мы говорим, что конус измерим, если его проекция — измеримое множество на сфере, и имеет границу меры ноль, если $\lambda(\partial \overline{A}) = 0$. Обозначим через $\angle A$ телесный угол конуса A:

$$\angle A = \lambda(\overline{A}).$$

Через K будем обозначать объединение координатных плоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_i = 0 \text{ для некоторого } i\}.$$

Для произвольного $B \subset \mathbb{R}^d$ обозначим

$$B^* = B \cap \mathbb{Z}^d,$$
$$f(B) = \int_B f(x)dx,$$
$$f(B^*) = \sum_{x \in B^*} f(x).$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функции $f, f_1, f_2, \ldots$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для любого конуса A с границей меры ноль и вершиной в нуле*

$$f_k(A^* \setminus \{0\}) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(A).$$

Доказательство. Рассмотрим единичный куб с вершинами в целых точках. Среди его вершин есть ровно одна, расстояние от которой до нуля минимально. Будем называть ее ближней вершиной куба. Аналогично дальней вершиной куба назовем вершину, расстояние от которой до нуля максимально. Основная идея доказательства заключается в следующем: для почти всех целочисленных точек внутри конуса мы рассмотрим куб, для которого данная точка является ближней вершиной. В силу монотонности плотностей, сумма интегралов по таким кубам будет меньше, чем сумма по целым точкам. При этом мы покажем, что в пределе интеграл по таким кубам будет равен $f(A)$. Аналогично рассматривая кубы, в которых данная вершина является дальней, мы получим набор кубов, интеграл по которым оценивает сумму по целым точкам сверху, а в пределе стремится к $f(A)$. Зажав тем самым сумму с двух сторон величинами, стремящимися к нужной, получим требуемое.

Перейдем к формальному доказательству леммы. Для начала докажем техническое утверждение, показывающее, что некоторыми кубами и точками можно пренебрегать при изучении предела.

Далее в доказательстве леммы $d = n+1$ — размерность пространства. Рассмотрим $U = \big(K \cup \partial A\big)_{\sqrt{d}}$ — $\sqrt{d}$ - окрестность границы конуса и координатных плоскостей.

Утверждение 1. *Пусть последовательность функций f_k удовлетворяет первым трем условиям теоремы 2. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(U) = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.
Рассмотрим множество $K\cup\partial A$. Поскольку конус A имел границу меры ноль, то $f(K\cup \partial A) = 0$. Рассмотрим конусы

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d \colon \frac{dist(x, K\cup\partial A)}{|x|} \leqslant \delta\}.$$

Проекция конуса A_δ на единичную сферу является δ-окрестностью множества $\overline{\partial A \cup K}$, а значит конусы измеримы. Ясно, что $A_{\delta_1} \subset A_{\delta_2}$ при $\delta_1 < \delta_2$. При этом $\bigcap_{\delta>0} A_\delta = K\cup\partial A$, а значит

$$f(A_\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Выберем δ так, чтобы выполнялось $f(A_\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $R = \frac{\sqrt{d}}{\delta}$ и найдем k_ε, такое что при $k > k_\varepsilon$ $f_k\big(B_R(0)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $f_k\big(A_\delta\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ (такое k_ε существует по условиям (ii) и (iii)). Заметим, что $U \subset B_R(0)\cup A_\delta$. Значит

$$f_k(U) \leqslant f_k\big(B_R(0)\big) + f_k\big(A_\delta\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

для любого $k > k_\varepsilon$. Значит для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k

$$0 \leqslant f_k(U) < \varepsilon,$$

откуда находим требуемый предел. Утверждение доказано.

□

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы. Нужно доказать, что

$$f_k(A^*\setminus\{0\}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A).$$

По условию (iv) мы знаем, что

$$f_k(K^*\setminus\{0\}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

а значит достаточно доказать, что

$$f_k(A^* \setminus K^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A).$$

Рассмотрим точку $a \in A^* \setminus K^*$. Все координаты этой точки ненулевые, значит существуют единичные кубы C_a^+ и C_a^-, для которых точка a является соответственно ближней и дальней (в C_a^+ координаты всех вершин по модулю не меньше, чем координаты a, а в C_a^- — не больше). В силу монотонности плотностей (условие (i)) имеем

$$f_k(C_a^+) \leqslant f_k(a) \leqslant f_k(C_a^-). \tag{3}$$

Обозначим

$$C^+ = \bigcup_{a\in A^*\setminus K^*} C_a^+, \qquad C^- = \bigcup_{a\in A^*\setminus K^*} C_a^-.$$

Все кубы C_a^+ различны, так как имеют разные ближние вершины. Аналогично, все кубы C_a^- различны, так как имеют разные дальние вершины. Поэтому, просуммировав неравенство (3) по всем $a \in A^* \setminus K^*$, получим

$$f_k(C^+) \leqslant f_k(A^* \setminus K^*) \leqslant f_k(C^-). \tag{4}$$

Покажем, что $A \triangle C^+ \subset U$. Пусть $x \in A\triangle C^+$. Рассмотрим единичный куб C_a целочисленной решетки, в котором лежит точка x, где a — ближняя вершина куба. Если $x \in C^+ \setminus A$, то $C_a = C_a^+$ и $a \in A$. Тогда $dist(x, \partial A \cup K) \leqslant dist(x, a) \leqslant diam(C_a) = \sqrt{d}$. Если же $x \in A\setminus C^+$, то $a \in (\mathbb{R}^d \setminus A)\cup K$, а значит опять имеем $dist(x, \partial A\cup K) \leqslant dist(x, a) \leqslant \sqrt{d}$. Значит каждая точка симметрической разности лежит в $\sqrt{d}$ - окрестности границы конуса или координатной плоскости. Значит $A\triangle C^+ \subset U$, что и требовалось. Аналогично доказывается, что $A\triangle C^- \subset U$.

Таким образом, получаем

$$|f_k(C^+) - f_k(A)| \leqslant f_k(C^+ \triangle A) \leqslant f_k(U).$$

$f_k(U)$ стремится к нулю с ростом k по утверждению 1. Значит

$$|f_k(C^+) - f_k(A)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Аналогично

$$|f_k(C^-) - f_k(A)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

По условию (ii) $f_k(A) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A)$. Итого, получили $f_k(C^+) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A)$ и $f_k(C^-) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A)$. То есть левая и правая часть неравенства (4) стремятся к $f(A)$. А значит $f_k(A^* \setminus K^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A)$, что и требовалось доказать.

$\square$

Перейдем к доказательству теоремы. Нам нужно доказать, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$\mu_{f_k,n}(I) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\int_I h_f}{\int_{\mathbb{R}} h_f}.$$

Для каждого $l = 0, 1, \ldots n$ рассмотрим следующие множества:

$$A_l(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon p_{\mathbf{x}} \text{ имеет } l \text{ корней на интервале } I\},$$
$$A_l^*(I) = A_l(I) \cap \mathbb{Z}^{n+1},$$

где

$$p_{\mathbf{x}}(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n.$$

Каждое множество $A_l(I)$ является конусом с границей меры ноль (см. [3]), а значит для него применима лемма 1. Зафиксируем интервал I и распишем $\mu_{f_k,n}(I)$ по определению:

$$\mu_{f_k,n}(I) = \sum_{a \in I \cap \overline{\mathbb{Q}}_n} \mu_{f_k,n}(a) = \sum_{a \in I \cap \overline{\mathbb{Q}}_n} S_{f_k}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ u_n \neq 0}} f(\mathbf{u}) \mathbb{1}[p_{\mathbf{u}}(a) = 0].$$

Каждая точка $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1}, u_n \neq 0$, лежит в одном из множеств $A_l^*(I)$ и вносит в двойную сумму вклад $S_{f_k}^{-1} l f_k(u)$. Пусть $K_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_n \neq 0\}$. Тогда мы можем написать

$$\mu_{f_k,n}(I) = S_{f_K}^{-1} \sum_{l=1}^{n} l f_k \left(A_l^*(I) \setminus K_n^*\right) = \frac{\sum_{l=1}^n l f_k \left(A_l^*(I) \setminus K_n^*\right)}{\sum_{l=1}^n l f_k \left(A_l^*(\mathbb{R}) \setminus K_n^*\right)}.$$

По условию (iv) теоремы 2 имеем

$$f_k(K_n^* \setminus \{0\}) \leqslant \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \exists m \colon u_m = 0}} f_k(\mathbf{u}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

В свою очередь, по лемме 1

$$f_k(A_l^*(I) \setminus \{0\}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A_l(I)),$$
$$f_k(A_l^*(R) \setminus \{0\}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A_l(R)).$$

Значит

$$f_k(A_l^*(I) \setminus K_n^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A_l(I)),$$
$$f_k(A_l^*(R) \setminus K_n^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(A_l(R)).$$

Таким образом,

$$\mu_{f_k,n}(I) = \frac{\sum_{l=1}^{n} l f_k\left(A_l^*(I) \setminus K_n^*\right)}{\sum_{l=1}^{n} l f_k\left(A_l^*(\mathbb{R}) \setminus K_n^*\right)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\sum_{l=1}^{n} l f\left(A_l(I)\right)}{\sum_{l=1}^{n} l f\left(A_l(\mathbb{R})\right)} =$$
$$= \frac{\sum_{l=1}^{n} l\mathbb{P}\{G_f \text{ имеет } l \text{ корней на отрезке } I\}}{\sum_{l=1}^{n} l\mathbb{P}\{G_f \text{ имеет } l \text{ вещественных корней}\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{E}\left[\text{количество вещественных корней } G_f \text{ на интервале } I\right]}{\mathbb{E}\left[\text{количество вещественных корней } G_f\right]} = \frac{\int_I h_f}{\int_{\mathbb{R}} h_f},$$

что и требовалось доказать.

6. Доказательство следствий 1 и 2

6.1. Доказательство следствия 1

Поскольку $\mu_{f_k,n} = \mu_{\alpha f_k,n}$, можно считать, что все функции f_k нормированы, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1.$$

Выберем в качестве функции f плотность распределения стандартного гауссовского вектора в $\mathbb{R}^{n+1}$ и проверим выполнение условий теоремы 1.

Свойство (i): по условию следствия 1, f_k радиально симметричны и убывают с ростом радиуса. Поэтому, если $x, \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ таковы, что $sgn(\alpha_i) = sgn(x_i)$ (или одна из координат нулевая) для любого i, то $|x+\alpha| \geqslant |x|$, а значит $f(x+\alpha) \leqslant f(x)$. Значит f_k убывают, и первое свойство выполнено.

Свойство (ii): так как f_k радиально симметричны и нормированы, $f_k(A) = \angle A$, а значит $\lim_{k\to\infty} f_k(A) = \angle A = f(A)$.

Свойство (iii): покажем, что

$$f_k\big(B_R(0)\big) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

при $R > r$. Действительно,

$$f_k(B_R) = f_k(B_r) + f_k(B_R \setminus B_r) \leqslant f_k(B_r) + Vol\big(B_R \setminus B_r\big) \cdot \max_{x\in B_R\setminus B_r} f_k(x).$$

Поскольку f_k убывают с ростом радиуса,

$$\max_{x\in B_R\setminus B_r} f_k(x) \leqslant \min_{x\in B_r} f_k(x).$$

Последний минимум стремится к нулю, так как $f_k(B_r) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Итого получаем

$$0 \leqslant f_k(B_R) \leqslant f_k(B_r) + Vol\big(B_R \setminus B_r\big) \cdot \min_{x\in B_r} f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

что и требовалось.

Свойство (iv): нужно проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} f_k(K^* \setminus \{0\}) = 0.$$

Рассмотрим точку $m \in K^* \setminus \{0\}$. Назовем ее хорошей, если она имеет вид

$$m = (m_1, m_2, \ldots m_s, 0, \ldots, 0),\ m_i \in \mathbb{N},\ 0 < s < n+1.$$

Рассмотрим единичный куб C_a с ближней вершиной $a = (m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_s - 1, 0, \ldots, 0)$. Координаты остальных вершин куба отличаются от координат a добавлением единиц в некоторых местах. В частности сама вершина m является вершиной C_a. Рассмотрим симплекс S_a, вершинами которогого являются все вершины C_a, отличающиеся от a не более чем в одной координате. Рассмотрим точку $x \in S_a$. Утверждается, что $|x| \leqslant |m|$. Действительно, x можно представить в виде

$$x = (m_1 - 1 + \alpha_1,\ m_2 - 1 + \alpha_2,\ \dots,\ m_s - 1 + \alpha_s,\ \alpha_{s+1}, \dots,\ \alpha_{n+1})$$

для некоторых положительных α_i, $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |m|^2 - |x|^2 &= \sum_{i=1}^{s} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{s} (m_i - 1 + \alpha_i)^2 + \sum_{i=s+1}^{n+1} \alpha_i^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{s} (1 - \alpha_i)(2m_i - 1 + \alpha_i) - \sum_{i=s+1}^{n+1} \alpha_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{s} (1 - \alpha_i) - \sum_{i=s+1}^{n+1} \alpha_i \geqslant s - 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Значит $|x| \leqslant |m|$ и $f_k(x) \geqslant f_k(m)$ для любых f_k и x. Тогда получаем неравенство

$$f_k(C_a) \geqslant f_k(S_a) = \int_{S_a} f_k(x) dx \geqslant Vol(S_a) \cdot f_k(m),$$

откуда $f_k(m) \leqslant \frac{f_k(C_a)}{Vol(S_a)}$. Рассмотрим теперь произвольную точку $m \in K^* \setminus 0$. Переставляя ее координаты и домножая их при необходимости на -1 можно получить хорошую точку m_{good}. Заметим, что $|m| = |m_{good}|$, а значит $f_k(m) = f_k(m_{good}) \leqslant \frac{f_k(C_{a_{good}})}{Vol(S_{a_{good}})}$. Просуммируем это неравенство по всем $m \in K^* \setminus \{0\}$. Слева получим $f_k(K^* \setminus \{0\})$. Каждый куб $C_{a_{good}}$ в правой части посчитан не более чем некоторое постоянное (зависящее от n) число раз. Поскольку объемы всех $S_{a_{good}}$ равны, а каждый куб $C_{a_{good}}$ лежит в U (у него есть вершина из K), то правую часть можно оценить через $c(d) f_k(U)$ для некоторой константы $c(d)$. Таким образом, получили неравенство

$$0 \leqslant f_k(K^* \setminus \{0\}) \leqslant c(d) f_k(U).$$

Правая часть неравенства стремится к нулю по утверждению 1. Значит

$$f_k(K^* \setminus \{0\}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

что и требовалось.

Таким образом, мы проверили все условия теоремы 2, а значит

$$\mu_{f_k, n} \ \xrightarrow[k \to \infty]{w} \ \frac{h_f}{\int h_f}.$$

Осталось лишь заметить, что плотность совместного распределения коэффициентов многочлена Каца это в точности f. Следствие доказано.

6.2. Доказательство следствия 2

Достаточно проверить, что выполнены условия теоремы 2.

(i): Пусть $x, \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяют условиям из определения убывающей функции. Тогда $|x_i+\alpha_i| \geqslant |x_i|$, а значит $f_k^{(l)}(x_i+\alpha_i) \leqslant f_k^{(l)}(x_i)$. При этом все $f_k^{(l)}$ неотрицательны, а значит можно перемножить неравенства для всех l. Получим $f_k(x+\alpha) \leqslant f_k(x)$, что и требовалось.

(ii): Входит в условия следствия 2.

(iii): В силу убывания функций f_k для любого радиуса R

$$0 \leqslant f_k\big(B_R(0)\big) \leqslant Vol\big(B_R(0)\big) f_k(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

(iv): Покажем, что $\lim_{k\to\infty} f_k(K^*) = 0$. Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть последовательность функций f_k из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^1_+$ удовлетворяет условиям*

- *f_k представляются в виде произведения одномерных неотрицательных функций*
$$f_k(x) = f_k^{(1)}(x_1) \cdot f_k^{(2)}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_k^{(d)}(x_d),$$
- *каждая $f_k^{(l)}$ убывает (в описанном ранее смысле), и*
$$\int_{\mathbb{R}} f_k^{(l)}(x)dx = 1,$$
- $$f_k^{(l)}(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Тогда $f_k(K^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и при больших k выполнено $f_k\big((\mathbb{R}^d)^*\big) < 2$.

Доказательство. Индукция по размерности d.
База: $d = 1$.
$f_k(K^*) = f_k(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ по условию. Для каждой точки $m > 0$ рассмотрим интервал $I_m = (m-1, m]$, а для каждой точки $m < 0$ — интервал $[m, m+1)$. Тогда в силу убывания плотностей

$$f_k(m) \leqslant f_k(I_m).$$

Заметим, что интервалы I_m попарно не пересекаются, а значит

$$f_k(R^*) = f(0) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_k(m) \leqslant f_k(0) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_k(I_m) \leqslant f_k(0) + 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Переход: $d-1 \to d$. Каждой точке $m \in \mathbb{Z}^d \setminus K^*$ сопоставим куб I_m, в котором m является дальней вершиной куба (напомним, что вершина называется дальней, если расстояние от нее до нуля максимально среди всех точек куба). В силу убывания плотностей

$$f_k(m) \leqslant f_k(I_m).$$

При этом кубы I_m (а точнее их внутренности) не пересекаются. Поэтому

$$f_k\big((\mathbb{R}^d)^* \setminus K^*\big) \leqslant f_k\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^d} I_m\Big) \leqslant f_k(\mathbb{R}^d) = 1.$$

Пусть K_i — координатная плоскость, соответствующая $x_i = 0$. Рассмотрим K_d как $(d-1)$-мерное пространство с плотностями $f'_k(x) = f_k^{(1)}(x_1) \cdot f_k^{(2)}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_k^{(d-1)}(x_{d-1})$. По предположению индукции $f'_k\big((K_d)^*\big) < 2$ при достаточно больших k. При этом

$$f_k(K_d^*) = f_k^{(d)}(0) \cdot f'_k(K_d^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

так как второй сомножитель ограничен, а первый стремится к нулю. Аналогично

$$f_k(K_i^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

для всех $i = 1, \ldots, d$. Тогда

$$f_k(K^*) \leqslant \sum_{i=1}^{d} f_k(K_i^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

В свою очередь

$$f_k\big((\mathbb{R}^d)^*\big) = f_k\big((\mathbb{R}^d)^* \setminus K^*\big) + f_k(K^*) \leqslant 1 + f_k(K^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Значит $f_k\big((\mathbb{R}^d)^*\big) < 2$ при больших k. Лемма доказана, и вместе с ней завершено доказательство следствия 2.

□

Список литературы

[1] Alan Edelman and Eric Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 32(1):1–37, 1995.

[2] P. Erdös, M. Kac, E. R. van Kampen, and A. Wintner. Ramanujan sums and almost periodic functions. *Studia Math.*, 9:43–53, 1940.

[3] F. Götze, D. Koleda, and D. Zaporozhets. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach. *Adv. Math.*, 359:106849, 33, 2020.

[4] M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:314–320, 1943.

[5] D. Koleda. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 29(1):179–200, 2017.

[6] M. Mikolás. Farey series and their connection with the prime number problem. I. *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, 13:93–117, 1949.

[7] H. Niederreiter. The distribution of Farey points. *Math. Ann.*, 201:341–345, 1973.

[8] N. Petroni. Taking rational numbers at random, 2019.

[9] D. N. Zaporozhets. Random polynomials and geometric probability. *Dokl. Akad. Nauk*, 400(3):299–303, 2005.

[10] В. Острик and М. Цфасман. *Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые*, volume 8 of *Библиотека "Математическое просвещение"*. МЦНМО, Москва, 3 edition, 2011.